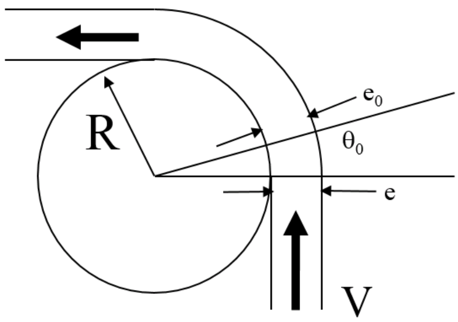
CONSERVATION DE LA MASSE ET DU SOLUTE

Exercice 6.3

On considère le passage sur roue dans lequel une plaque de plastique d'épaisseur e, initialement à vitesse verticale, **V**, tourne à 90 degrés autour d'une roue de rayon R (voir figure) sans glissement et à vitesse angulaire ω. La masse spécifique initiale du plastique est notée ρ_0. On suppose que l'épaisseur de la plaque reste constante égale à e et que la déformation en entrée de roue se fait linéairement entre les angles $\theta = 0$ et $\theta = \theta_0$. Le champ de vitesse dans cette zone s'écrit alors $\vec{v} = \left[R\left(1-\frac{\theta}{\theta_0}\right) + r\frac{\theta}{\theta_0}\right]\omega\vec{e}_\theta$ pour $0 \le \theta \le \theta_0$.

1. Ecrire l'équation de conservation de la masse en notant ρ la masse spécifique du plastique et en supposant que celle-ci ne dépends pas de l'angle θ.
2. Résoudre cette équation différentielle en notant ρ_0 la masse spécifique en entrée de roue, i.e. pour $\theta = 0$.
3. En quels points la masse spécifique reste-t-elle constante ?
4. Que se passe-t-il en sortie de roue ?
5. Calculer le tenseur vitesse des déformations définit comme la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse.



Passage sur roue d'un plastique avec e_0 = e.

$$\vec{v} = \left[R\left(1-\frac{\theta}{\theta_0}\right) + r\frac{\theta}{\theta_0}\right]\omega\vec{e}_\theta \text{ pour } 0 \le \theta \le \theta_0 .$$

1.- Ecrire l'équation de conservation de la masse en notant ρ la masse spécifique du plastique et en supposant que celle-ci ne dépends pas de l'angle θ.

$\vec{v}_{\theta=0} = R\omega\vec{e}_\theta$ et $\vec{v}_{\theta=\theta_0} = r\omega\vec{e}_\theta$ pour $R \le r \le R+e$

Comme $V_r = \vec{v}.\vec{e}_r = 0$, il n'y a pas de contraction radiale donc $e = e_0$

et la matière est donc mise en expansion, i.e. ρ diminue.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\vec{v} = 0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho V_\theta}{\partial\theta} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\rho}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} \text{ puisque } \rho=\rho(r,t)$$

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\rho\omega}{r}\left(-\frac{R}{\theta_0} + \frac{r}{\theta_0}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\rho\omega}{\theta_0}\left(1-\frac{R}{r}\right)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\rho\omega}{\theta_0}\left(\frac{R}{r}-1\right) \le 0 \text{ donc } \rho \text{ diminue.}$$

2.- Résoudre cette équation différentielle en notant ρ_0 la masse spécifique en entrée de roue, i.e. pour $\theta = 0$.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\rho\omega}{\theta_0}\left(\frac{R}{r}-1\right) \text{ avec } \rho=\rho 0 \text{ en } \theta = 0.$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\omega}{\theta_0}\left(\frac{R}{r}-1\right) = \frac{1}{t_0}\left(\frac{R}{r}-1\right) \text{ avec } \theta_0 = \omega t_0$$

$$\int_{t=0}^{t=t_0} d(\ln\rho) = \int_{t=0}^{t=t_0} \frac{1}{t_0}\left(\frac{R}{r}-1\right)dt = \left(\frac{R}{r}-1\right)$$

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{r}-1\right) \text{ soit } \rho = \rho_0 e^{\left(\frac{R}{r}-1\right)} \text{ diminue car } \left(\frac{R}{r}-1\right) \leq 0.$$

3.- En quels points la masse spécifique reste-t-elle constante ?
En r = R, i.e. sur la roue de rayon R.

NB: en r = R+e, $\rho = \rho_0 e^{\left(\frac{R}{R+e}-1\right)} = \rho_0 e^{\left(\frac{R-R-e}{R+e}\right)} = \rho_0 e^{\left(\frac{-e}{R+e}\right)} \approx \rho_0 e^{\left(\frac{-e}{R}\right)} \approx \rho_0\left(1-\frac{e}{R}\right)$ si $e \ll R$

4.- Que se passe-t-il en sortie de roue ?
En sortie de roue, l'évolution est inverse, i.e. la masse spécifique augmente pour reprendre sa valeur initiale partout dans l'épaisseur de la feuille.
NB : en réalité, l'épaisseur e de la plaque va aussi varier ….

5.- Calculer le tenseur vitesse des déformations définit comme la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse. Attention, ρ = r dans cette formule.

$$\frac{1}{2}\left[\mathbf{Grad}\,(\mathbf{v}) + (\mathbf{Grad}\,(\mathbf{v}))^T\right] =$$

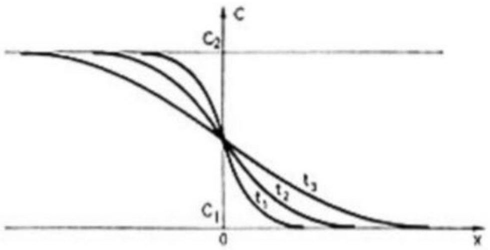
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial v_\rho}{\partial\rho} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\rho} - \frac{v_\theta}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\theta}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right) \\ & \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_\rho}{\rho} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \\ \text{Symétrique} & & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Avec $\vec{v} = \left[R\left(1-\frac{\theta}{\theta_0}\right) + r\frac{\theta}{\theta_0}\right]\omega\vec{e}_\theta = V_\theta(r,\theta)\vec{e}_\theta$,

$$\dot{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r}\right) & 0 \\ \text{sym} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{R\omega}{r\theta_0}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\theta - \theta_0) & 0 \\ \text{sym} & \frac{r}{R}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.6

On met en contact deux blocs métalliques en alliage AB de compositions différentes en éléments B et on dépose le tout dans un four de facon à activer la diffusion chimique. L'interface entre les deux blocs se trouve en x = 0. On note c2 la concentration initiale uniforme en B du bloc de gauche (x<0) et c1 la concentration du bloc de droite (x>0).



Evolution des profils de concentration avec la durée de diffusion : interdiffusion.

1. Ecrire l'équation que doit satisfaire la concentration en atome B, c(x,t), fonction de x et du temps t. On note D le coefficient de diffusion chimique de l'atome B.

C(x,t) doit vérifier l'équation de Fick sans terme d'advection : $\dfrac{\partial C}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$

2. La solution de l'équation ci-dessus est donnée par $c(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} c_0(u) e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}} du$ ou $c_0(u)$ = c(x,t=0) est le profil initial de concentration. Calculer alors la solution c(x,t) en faisant apparaitre la fonction erreur $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du$ avec $\operatorname{erf}(\infty)=1$.

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\left(\int_{-\infty}^{0} c_2 e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}} du + \int_0^{\infty} c_1 e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}} du\right) \text{ puisque } c_0(u)=c_2 \text{ pour } u<0 \text{ et } c_1 \text{ pour } u>0.$$

On pose $v = \dfrac{x-u}{\sqrt{4Dt}}$, $dv = \dfrac{-du}{\sqrt{4Dt}}$, il vient $C(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\displaystyle\int_{\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} c_2 e^{-v^2} dv - \int_{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}^{-\infty} c_1 e^{-v^2} dv\right)$

Or $\operatorname{erf}(\infty) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = 1 = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-v^2} dv + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-v^2} dv$

Ainsi $C(x,t) = \dfrac{c_2}{2}\left(1-\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right) + \dfrac{c_1}{2}\left(1+\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right)$ avec $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du$ et $\operatorname{erf}(\infty)=1$

$$C(x,t) = \frac{c_1+c_2}{2} + \frac{c_1-c_2}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

3. Que valent c(x=0,t) et c(x,t=∞) ?

$C(x=0,t) = \dfrac{c_1+c_2}{2} + \dfrac{c_1-c_2}{2}\operatorname{erf}(0) = \dfrac{c_1+c_2}{2}$, concentration à l'interface

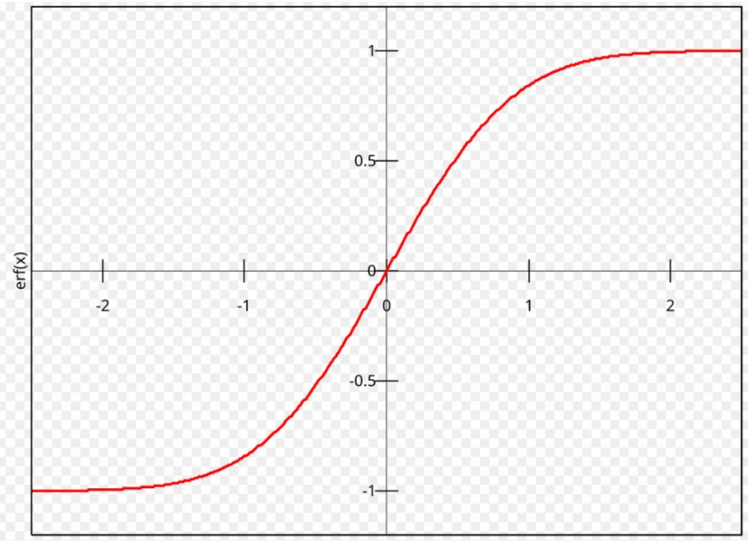
$C(x,\infty) = \dfrac{c_1+c_2}{2} + \dfrac{c_1-c_2}{2}\operatorname{erf}(0) = \dfrac{c_1+c_2}{2}$, concentration en tout x après un temps infini

NB: on peut "suivre" le point de concentration c_1 (en fait c à peine supérieure à c_1) en approximant erf(2) par 1:

$C(x,t) = c_1 = \dfrac{c_1+c_2}{2} + \dfrac{c_1-c_2}{2}\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$ si $\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \simeq 1$ i.e $\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}} = 1$ soit $x = 4\sqrt{Dt}$

On trouve que la longuer de diffusion chimique varie comme $\sqrt{Dt}$.

La fonction erf(x) pour x réel :



NB: on vérifie mathématiquement la solution de l'équation de Fick sans terme de transport en utilisant $\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,x,t)du = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f(u,x,t)}{\partial t}du$.

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$: dérivée en temps

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{-1}{4t\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du + \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)\frac{(x-u)^2}{4Dt^2}e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{-1}{4t\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du + \frac{1}{8Dt^2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)(x-u)^2e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$, seconde dérivée en x:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{-1}{4Dt\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)(x-u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{-1}{4Dt\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du + \frac{1}{8D^2t^2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)(x-u)^2e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du$$

$$D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{-1}{4t\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du + \frac{1}{8Dt^2\sqrt{\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} C_0(u)(x-u)^2e^{-\frac{(x-u)^2}{4Dt}}du = \frac{\partial C}{\partial t}$$

C(x,t) est bien solution de l'équation de Fick en 1D et sans transport.